レクチャー・ノート：

望月 新一 （京大数理研）

第一話：Faltings の p 進ホッジ理論の紹介：Grothendieck の「謎の関手」予想の観点から

目次：

I. ホッジ理論の基本目標：

(A.) 複素数体 $\mathbf{C}$ 上のホッジ理論： まず、 $\mathbf{C}$ 上の場合を思い出しておこう。 X を、 $\mathbf{C}$ 上 proper で smooth な多様体（で定まる複素多様体）とする。そうすると、一方では、

$$H^i_{sing}(X, \mathbf{C})$$

なる singular cohomology のコホモロジー加群があり、他方では、

$$\bigoplus_{p+q=i} H^p(X, \Omega^q_X)$$

なる Hodge cohomology のコホモロジー加群がある。 前者の特徴として、 X の台位相空間だけで決まるという性質があり、それに対して、後者は、少なくとも定義の上では、 X の複素構造に強く依存している。 そこで、 Hodge 理論が主張していることは、この二者が実は標準的に同型である：

$$H^i_{sing}(X, \mathbf{C}) \cong \bigoplus_{p+q=i} H^p(X, \Omega^q_X)$$

ということである。つまり、言い換えれば、この一見全然異質そうな二つの世界（＝ トポロジーの世界と、正則または代数的な関数の世界）が標準的につながっているのである。

(B.) p 進的な場合の基本設定： K は $\mathbf{Q}_p$ の有限次拡大とし、$A \subseteq K$ はその整数環とする。$\mathcal{X} \to Spec(A)$ は A 上 smooth で proper なスキームとする。 なお、$X \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{X} \otimes_A K$ とする。Hodge cohomology 群は本質的には代数的なものなので、(A.) の定義は今度の p 進的な状況のもとでもそのまま通用するけど、singular cohomology の方は（当然のことながら）étale cohomology に置き換えないといけない。 そうすると、次のような二種類の自然なコホモロジー群ができる：

(1) $H^i_{et}(X \otimes_K \overline{K}, \mathbf{Z}_p)$ （ここで、$\overline{K}$ は K の代数閉包）

(2) $\oplus_{p+q=i} \quad H^p(\mathcal{X}, \Omega^q_{\mathcal{X}/A})$

従って、（1）と（2）を比較しようとするのは自然でかつ概ね正解だが、ただし、ちょっとした技術的な問題として、（1）では $\mathbf{Z}_p$ 上の rank が Betti 数になるのに対して、（2）の方では、A 上の rank が Betti 数になる。そして、もうちょっと深刻な問題として、（1）には、$\Gamma_K \stackrel{\text{def}}{=} Gal(\overline{K}/K)$ による（一般には）非常に非自明な作用が自然に備わっているのに対して、（2）の方には、Γ_K の作用らしきものはどこにも見当たらない。

この二つの問題は一見（1）と（2）の間には自然な同型など有り得るものではないことを物語っているように思えるかもしれないが、それでも、なんとか適当な（恐らく定義するのが非常に非自明な）関手を施すことによって（1）と（2）をたがいに自然に変換することができるであろうというのが、Grothendieck の「mysterious functor」予想である。 ちなみに、今の予想は（遠アーベル π_1 に関する）いわゆる「Grothendieck 予想」とは違うのだが、「mysterious」という言葉が意味していると思われる、トポロジーと代数的関数（＝多項式）という二つの全く異質そうな世界を結び付ける不思議議な「何か」の存在を予想しているという点では、この二つの「Grothendieck 予想」は少なくとも哲学的には必ずしも無縁ではない。しかも、実際、[3] では、ちょうど「mysterious functor」予想の Faltings による解決を用いて、（曲線の場合の）遠アーベル予想を証明していることからも窺えるように、このふたつの予想のつながりには厳密な数学的な側面も有る。

(C.) 円分指標と Faltings [2] の主定理： それでは、主定理を述べるのに必要な記号を紹介しておこう。$\chi : \Gamma_K \to \mathbf{Z}_p^\times$ は円分指標とし、それに対応する Γ_K- 加群を $\mathbf{Z}_p(1)$ と書く。なお、Γ_K- 加群 M と $n \in \mathbf{Z}$ に対して、$M(n) \stackrel{\text{def}}{=} M \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_p(1)^{\otimes n}$ とする。 そうすると、Faltings[2] の主定理は次のようになる：

Theorem 1: *Let $\mathcal{X} \to Spec(A)$ be proper and smooth. Then there exists a natural Γ_K-equivariant isomorphism (for all $i \in \mathbf{Z}$)*

$$H^i_{et}(X \otimes_K \overline{K}, \mathbf{Z}_p) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \overline{K}^\wedge \cong \bigoplus_{p+q=i} H^p(X, \Omega^q_{X/K}) \otimes_K \overline{K}^\wedge(-q)$$

Moreover, there also exist integral and mod p^n versions of this isomorphism.

II.　Galois cohomology の局所的計算と「殆んど数学」：

(A.) **C** 上の場合：Stokes の定理への帰着：Faltings の定理の魅力のひとつは、その証明がある意味では、**C** 上の場合の比較定理（= (I.) の (A.)）の証明とよく似ているということである。どこが似ているかというと、proper な多様体に関する非自明な大域的な主張を、局所的な計算に帰着しているというところだ。そして、general nonsense しか使わずに、その局所的な計算から出るものたちを張り合わせることによって大域的な結果を出す。例えば、**C** 上の場合がどうだったかを思い出してみると、X 上の（普通の解析的な位相における）定数層 **C** の resolution をふたつ考える。ひとつは、$\mathcal{C}^\infty$ 級の微分形式による de Rham complex で、もうひとつは、「局所的な単体」上の関数による complex である。次に、微分形式を単体にそって積分することによって前者から後者への自然な写像が得られる。ただし、その自然な写像がコホモロジーの上でも射を引き起こすことをいうためには、写像が単なる加群の間の写像であるのみならずに、complex の間の写像であることを言わないといけない。しかし、それはちょうど、n 次元立方体上の Stokes の定理の内容である。すなわち、結局、単位区間上の微積分法の基本定理（という局所的な結果）に帰着しているというわけだ。p 進的な場合には、この Stokes の定理に対応するものは今から紹介する Galois cohomology の局所的な計算である。

(B.) 分岐を「殆んど」殺すための $\mathbf{Z}_p$- 拡大：A は (I.) の (B.) のような環とし、R は A 上 smooth で相対的次元 d の可換環とする。簡単のために、R の中に、$dlog(u_i)$ たちが $\Omega_{R/A}$ の基底となるような単元たち $u_1,\ldots u_d$ があると仮定する。さらに、$\overline{R}$ を、標数 0 ではエタールな R の最大の拡大とし、$\Gamma_R \stackrel{\mathrm{def}}{=} Gal(\overline{R}_K/R_K)$ とする。要は、Γ_R の Galois cohomology を計算したいのだが、直接計算しようとすれば難し過ぎるので、次のような構成をする。まず、

$$R_\infty \stackrel{\mathrm{def}}{=} R[\zeta_{p^\infty}, u_i^{1/p^\infty}] \subseteq \overline{R}$$

（ここで、ζ_{p^∞} は一の p 巾乗根全体を意味する）という $\overline{R}$ の部分環を導入する。そうすると、次のような重要な観察がある：

$(*^{alm})$ $\overline{R}$ は R_∞ の拡大として、「殆んどエタール」である。

ある B- 環 C が B 上「殆んどエタール」であるとはどういうことかというと、（つまらない技術的な条件を省略すると）標数 0 ではエタールで、かつ $e \in C \otimes_B C[1/p]$ という、対角埋め込みに対応する射影子が次の条件を満たしている：任意の $\epsilon > 0$ に対して、$p^\epsilon \cdot e$ が $C \otimes_B C \to C \otimes_B C[1/p]$ の像に入っている。つまり、もし C が普通の意味でほんとうに B 上エタールだったら、diagonal が $Spec(C \otimes_B C)$ の中の（幾つかの）連結成分になるので、$e \in C \otimes_B C$ ということになるけど、「殆んどエタール」なときには、$C \otimes_B C$ には「殆んど入っている」けど、必ずしもぴったり入っているとは限らない。あるいは、判別式の言葉でいうと、判別式の付値が任意に小さくなるような C の中の B-lattice がとれる、ということだ。例えば、最も基本的な例は、$A[\zeta_{p^\infty}]$- 環としての $\overline{A}$（$\stackrel{\mathrm{def}}{=} \overline{K}$ の整数環）である。

　ちなみに、$(*^{alm})$ の証明だが、技術的に込み入っているので、ここではあまり深入りしたくないのだが、簡単にいうと、R を height 1 の prime で局所化することによって DVR に関する問題に帰着しておいて、それで DVR の古典的な分岐理論から結果を導くというのが基本方針だ。

(C.) 「殆んどエタール」拡大に関する微分やコホモロジーの関手的振舞い： 「殆んどエタール」拡大のいいところは一言でいうと、殆んど、エタール拡大のように振舞うということだ。例えば、相対的微分加群は「殆んどゼロになる」（＝つまり、 p^ϵ に零化される）。 あるいは、Galois cohomology にしても、もし C が B 上 Galois で、 Galois 群が G ならば、$C[G]$- 加群の（高次）コホモロジーも殆んどゼロになる。特に、これらの事実を使うことによって、次のような計算ができる： まず、微分加群の基本完全系列のひとつである

$$\Omega_{\overline{A}/A} \otimes_{\overline{A}} \overline{R} \to \Omega_{\overline{R}/R} \to \Omega_{\overline{R}/R\otimes_A \overline{A}} \to 0$$

を持ち出す。そうすると、さっきの諸々の観察と $\Omega_{\overline{A}/A} \cong \overline{K}/\rho^{-1}\overline{A}(1)$ （ここで、 $\rho \in \overline{A} - \{0\}$）というよく知られている標準的な同型を適用すると、上の完全系列を

$$0 \to (\overline{R}[1/p]/\rho^{-1}\overline{R})(1) \to \,? \to \Omega_{R/A} \otimes_R (\overline{R}[1/p]/\overline{R}) \to 0$$

と変形することができる。更に、 $Hom(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1), \cdot)$ を施すと、 Galois 加群の標準的な拡大

$$0 \to \rho^{-1}\overline{R}^{\wedge} \to E_\rho \to \Omega_{R/V} \otimes_R \overline{R}^{\wedge}(-1) \to 0$$

が得られる。次に、 $\Delta_R \stackrel{\mathrm{def}}{=} Ker(\Gamma_R \to \Gamma_K)$ としておくと、 Γ_K- 加群の自然射

$$\Omega_{R/V} \otimes_R \overline{R}^{\wedge}_K(-1) \to H^1(\Delta_R, \overline{R}^{\wedge}_K)$$

が得られる。 ところが、 $H^i(\Delta_R, \overline{R}^{\wedge}_K)$ という Galois cohomology 群は、 R_∞/R でもって計算することができる（注： $Gal(R_\infty/R) \cong \mathbf{Z}_p^{d+1}$ なので、その Galois cohomology は非常に計算しやすい）ので、そうすると、この自然射が実は、標準的な（Γ_K- 同変な）同型

$$\phi^i : \Omega^i_{R/V} \otimes_R \overline{R}^{\wedge}_K(-1) \to H^i(\Delta_R, \overline{R}^{\wedge}_K)$$

を引き起こしていることが分かる。主定理はちょうど $\mathcal{X}$ に $Spec(R)$ と書けるアフィンたちによる被覆をとってきて、それぞれの $Spec(R)$ に対応する ϕ^i たちを張り合わせることによって示すのである。

Remark: Faltings [2] の主定理の証明の要である同型 ϕ^i とほとんど同値なものは、 Faltings とほぼ同時期に兵頭治氏によっても（修士論文で！）独立に発見されているそうである。

(D.) 主定理の証明： まず、エタールな $Spec(R) \to \mathcal{X}$ に対して、 $\overline{R}_K$ という Γ_R- 加群を対応させることによって、（大雑把にいうと） X_{et} 上の層 $\mathcal{R}_K$ が得られる。特に、自然射

$$H^i_{et}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p) \to H^i_{et}(X_{\overline{K}}, \mathcal{R}_K)$$

が得られる。ところが、 ϕ^i たちを張り合わせて、コホモロジーをとると、

$$H^i_{et}(X_{\overline{K}}, \mathcal{R}_K) \cong \bigoplus_{p+q=i} H^p(X, \Omega^q_{X/K}(-q)) \otimes_K \overline{K}^{\wedge}$$

なる同型が引き起こされる。 そして、このふたつの写像の合成を取ると、 Γ_K- 同変な自然射

$$H^i_{et}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p) \otimes_{\mathbf{Q}_p} \overline{K}^\wedge \to \bigoplus_{p+q=i} H^p(X, \Omega^q_{X/K}(-q)) \otimes_K \overline{K}^\wedge$$

ができる。 この自然射が同型になることがいえれば、証明は完成するのだが、それをいうためには、Poincaré duality を使って、まず逆写像（の候補）を作っておいて、そして、上の自然射とこの逆写像の候補が両方とも Chern 類と両立するという自明な事実を旨く関手的にいじることによって、上の自然射が実際同型になることを結論する。

III. p-divisible group の場合：

(A.) Tate の理論： $G \to Spec(A)$ を p-divisible group とする。（定義に関しては、[5] を参照。）感覚的には、p-divisible group は（偏極が必ずしも入るとは限らない）アーベル複素多様体の p 進版のようなものだ。特に、正真正銘のアーベル多様体が与えられた時、その $Ker(p^n)$ たちをとることによって、p-divisible group をつくることができる。もっと一般に、任意の p-divisible group G は必ず次のように生じる：$\mathcal{G} \to Spec(A)$ という（エタールな部分を含むかもしれない）形式群があって、その $\mathcal{G}$ の $Ker(p^n)$ たちの union が G になる。ところが、この $\mathcal{G}$ は（標準的な同型を除いて） unique なので、G の接空間 Θ_G を、$\mathcal{G}$ のゼロにおける接空間と定義することができる。一方、G を $Spec(\overline{K})$ に引き戻し、$Hom(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p, \cdot)$ をとることによって、いわゆる Tate 加群 $T(G)$ をつくることができる。よく知られているように、$T(G)$ には自然な Γ_K- 作用が入る。 そうすると、次のような定理が成り立つ（[5]）：

Theorem 2: *Let $G \to Spec(A)$ be a p-divisible group. Then there is a natural isomorphism of Γ_K-modules*

$$T(G) \otimes_{\mathbf{Q}_p} \overline{K}^\wedge \cong ((\Omega_{G^*}) \oplus \Theta_G(1)) \otimes_A \overline{K}^\wedge$$

(Here, Ω_{G^*} is the A-dual of the A-module Θ_{G^*}, and G^* is the dual p-divisible group to G.) Moreover, when G arises from an abelian variety, this isomorphism commutes with that of Theorem 1 (due to Faltings).

(B.) 絶対不分岐な場合： A が $\mathbf{Z}_p$ 上不分岐なときには、もっと精密な理論（[6]）がある。 ここでは、細かいことは省略するが、早い話し、p-divisible group G に対して、filtration 付きの有限自由 A- 加群（いわゆる Dieudonné- 加群） $F^1(M) \subseteq M$ と、その M への Frobenius の作用（$= A$ の Frobenius に関して半線形的な自己準同型 $\Phi_M : M \to M$）を対応させることができる。しかも、

$$F^1(M) \cong \Omega_G; \quad M/F^1(M) \cong \Theta_{G^*}$$

といった標準的な同型があるから、M は G の de Rham cohomology のようなものだ。そして、$(F^1(M) \subseteq M, \Phi_M)$ というデータから、もとの G を完全に復元することができる。例えば、Tate 加群 $T(G)$ は、B_{crys} という非常に大きくて複雑な環の上での M の Frobenius （$= \Phi_M$）不変量をとることによって復元することができる。

第二話：Grothendieck 予想と標準的通常曲線の群論的特徴付け

目次：

I. 標準的通常曲線の定義と基本性質

(A.) Serre-Tate 理論の hyperbolic 版： p 進的な base 上のアーベル多様体の理論では、 Serre-Tate による標準的な持ち上げの理論があることは周知の通りだが、実は、双曲的な曲線の場合にも、それとちょうど類似的な標準的持ち上げ理論がある。まず、参考までに、アーベル多様体の場合を少し復習してみると、いろんな定式化の仕方はあるが、 hyperbolic な場合への一般化に最も適しているのは次の定式化である。 k は標数 p の完全体とし、 $A \stackrel{\mathrm{def}}{=} W(k)$ はその Witt 環とする。 そうすると、$\mathcal{A}_g$ （$= \mathbf{Z}_p$ 上の主偏極アーベル多様体のモジュライ・スタック）の上に、 p 進的なétale formal stack

$$\mathcal{A}_g^{ord} \to \mathcal{A}_g$$

が有って、$\mathcal{A}_g^{ord}$ の上に自然な Frobenius 持ち上げ $\Phi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}_g^{ord} \to \mathcal{A}_g^{ord}$ が作用していて、その $\Phi_{\mathcal{A}}$ に固定される A- 有理点が、 Serre-Tate の意味での「標準持ち上げ」である。 一方、双曲的曲線の場合、$\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ （$= \mathbf{Z}_p$ 上の (g, r) 型安定曲線のモジュライ・スタック）の上では、（定義は省略するが）非常に自然な p 進的なétale formal stack

$$\overline{\mathcal{N}}_{g,r}^{ord} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,r}$$

が有って、$\overline{\mathcal{N}}_{g,r}^{ord}$ の上に自然な Frobenius 持ち上げ $\Phi_{\mathcal{N}} : \overline{\mathcal{N}}_{g,r}^{ord} \to \overline{\mathcal{N}}_{g,r}^{ord}$ が作用していて、その $\Phi_{\mathcal{N}}$ に固定される A- 有理点を、$\overline{\mathcal{N}}_{g,r}^{ord}$ の「標準的な点」とみることができる。アーベル多様体の場合と違って、$\overline{\mathcal{N}}_{g,r}^{ord} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ は open immersion にはならないが、$\overline{\mathcal{N}}_{g,r}^{ord}$ の「標準的な点」を $\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ に落すことによって、$\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ の「標準的な A- 有理点」、即ち、 A 上の「標準的な曲線 $X \to Spec(A)$」が得られる。今日の話しはそういう X に関するものである。

(B.) Frobenius 不変な固有束による特徴付け: 「標準曲線」を (A.) のように定義してしまうと、$\overline{\mathcal{N}}_{g,r}^{ord}$ や $\Phi_{\mathcal{N}}$ といった具体的には非常に計算しにくい対象たちが出てきて、曲線に関しては余り内在的な定義にはならないので、 (A.) の定義をもう少し内在的な形に直したい。それを達成

するためには、まず「固有束」という余りよく知られていない概念を導入しないといけないのだが、 $X \to Spec(A)$ という種数 $g \geq 2$ の曲線が与えられたとき、次のように定義する。

Definition 1: $(P \to X, \nabla_P)$ は X 上の、接続付きの $\mathbf{P}^1$-*bundle* とする。 *section* $\sigma : X \to P$ が与えられたら、σ を ∇_P で微分することによって、σ の *Kodaira-Spencer map* $\tau_X \to \sigma^* \tau_{P/X}$ （ここで、「τ」は *tangent bundle* の意味）はいつでも作れるが、 *Kodaira-Spencer map* が同型となるような σ を許容する (P, ∇_P) を「固有束」（*indigenous bundle*）という。

X 上の固有束 $\mathcal{P} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (P, \nabla_P)$ が与えられたら、$\mathcal{P}$ を $Crys(X \otimes_A k/A)$ 上の crystal とみることができる。そうすると、 $X_k \stackrel{\mathrm{def}}{=} X \otimes_A k$ 上の Frobenius で引き戻すことによって、 $\Phi_X^* \mathcal{P}$ という新たな $Crys(X \otimes_A k/A)$ 上の crystal が得られる。 我々は、実は、最終的には、 Frobenius で引き戻しても自分自身に戻るような「Frobenius 不変」な $\mathcal{P}$ について考えたいのだが、ある技術的な理由によって、「Frobenius 不変」を $\Phi_X^* \mathcal{P} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{P}$ で定義すると旨く行かない。 従って、ここでは余り深入りしたくないのだが、 $\Phi_X^* \mathcal{P}$ の integral structure を少し調整する（＝つまり、 $\mathbf{Q}_p$ 上の構造は変わらない）ことによって、 $\mathbf{F}^* \mathcal{P}$ という、 Frobenius 引き戻しの「よりよい」定義（＝ renormalized （再正規化） Frobenius）が得られて、そっちの方の定義を採用することによって、より旨く行くような「Frobenius 不変性」の定義が得られる。

Definition 2: 固有束 $\mathcal{P}$ が $\mathbf{F}^* \mathcal{P} \cong \mathcal{P}$ を満たしているとき、$\mathcal{P}$ を「*Frobenius* 不変」な固有束という。

そうすると、次の定理 ([4]) が成り立つ。

Theorem 1: $X \to Spec(A)$ が、 *(A.)* の意味で「標準曲線」であるのと、「*ordinary*」（という、或る技術的な条件）を満たしている「*Frobenius* 不変」な固有束 $\mathcal{P}$ を許容するのとが、同値である。

(C.) Galois 表現: $X \to Spec(A)$ は標準曲線とする。すると、 Theorem 1 から分かるように、Frobenius 不変な固有束 $\mathcal{P}$ が X に入る。ところが、 Dieudonné 加群の理論の帰結として、そういう $\mathcal{P}$ は必ず X 上の p-divisible group $\mathcal{G} \to X$ の Dieudonné 加群（の射影化 $\mathbf{P}(-)$）として生じるのだ。つまり、言い換えれば、この Dieudonné 理論の帰結というのは、第一話の言葉でいうと、 (III.) の (B.) の parametrized version なのである。したがって、更に、$\mathcal{G}$ を $X_K \stackrel{\mathrm{def}}{=} X \otimes_A K$ （ここで、 K は A の商体）に制限すると、$\Pi_X \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pi_1(X_K)$ （基点のことは簡単のため、気にしない）の標準的な表現

$$\kappa_X : \Pi_X \to GL_2(\mathbf{Z}_p)$$

が得られる。つまり、 X が標準曲線であると仮定するだけで、 κ_X のような crystalline 表現 （＝この場合には、単に、 p-divisible group から生じたという意味）が存在するという非常に非自明な帰結を導くことができた。 Π_X がこのような crystalline 表現を許容するということは、曲線 X の性質としては、非常に珍しい性質である。ということは、 （ほかにも幾つか余り重要でない技術的な条件も有るが） 、実は、大雑把にいうと、 κ_X のような crystalline 表現を持つ X は必ず標準的になる。

(D.) 問題提起: $V \to Spec(A)$ がアーベル多様体ならば、（よく知られているように）その p 進 Tate 加群 $T_p(V)$ を見る（つまり、$T_p(V)$ がエタールな部分と乗法的な部分の直和に分解するという条件だが）ことによって、V が標準的なのかどうかが簡単に判定できる。ということは、種数 $g \geq 2$ の曲線 $X \to Spec(A)$ が与えられたとき、Π_X （或いは、もっと正確にいうと、$\Gamma_K \stackrel{\mathrm{def}}{=} Gal(K)$ の幾何的 π_1、$\Delta_X \subseteq \Pi_X$、への外部作用）しか使わずに、X が標準的なのかが判定できる筈である。 ところが、それが実際出来るのだ、というのが今日の話しの主テーマである。

II. Local pro-p Grothendieck Conjecture との関係

(A.) [3] の主定理の復習: まず、[3] の主定理（の今の話しに関連する特別な場合）を思い出しておこう。

Theorem 2: *Let K be as above. Let $X_K \to Spec(K)$ and $X'_K \to Spec(K)$ be smooth, proper, geometrically connected curves over K of genus ≥ 2. Let Δ_X (respectively, $\Delta_{X'}$) be the pro-p completion of the geometric fundamental group of X_K (respectively, X'_K). Then the natural map*

$$Isom_K(X_K, X'_K) \to Out_\rho(\Delta_X, \Delta_{X'})$$

defined by "looking at the induced morphism on fundamental groups" is bijective. Here, "Out_ρ" denotes outer isomorphisms between the two groups in parentheses that are compatible with the natural outer actions of Γ_K.

つまり、簡単にいうと、曲線 X_K の同型類は Δ_X への Γ_K の外部作用だけで関手的に決まる、という内容の定理である。ということは、或る意味では、この定理は (I.) の (D.) で提起された問題への一種の答えを既に提示しているのである。なぜなら、 Theorem 2 によると、X_K の同型類までが Π_X で既に決まってしまうし、しかも「標準的」なのかどうかは明らかにも X_K の同型類にしか依存しないので、それで、 X_K が標準的なのかどうかが Π_X を見るだけで判定できたことになる。

しかし、このような答えだけではちょっと満足できない。なぜなら、まず、判定法としては、ちょっと間接的過ぎるというのも不満な点のひとつだが、もっと大きな問題点として、このような答えは (I.) の (D.) の精神からはずれているのである。 ということは、或る表現 $\Pi_X \to GL_2(\mathbf{Z}_p)$ が与えられたとき、それがどんな時に κ_X になるのか、つまり、どんな時に crystalline になるのか、を群論的に判定させてくれるような理論が欲しいのである。（実は、 X が標準的になるためには、その表現が crystalline であるという条件以外にも幾つかの細かい技術的な条件を満たさないといけないが、それらの条件は余り本質的ではないし、しかも群論的な言葉になおすのは比較的自明であるので、その話しはここでは省略させてもらう。）

とにかく、Π_X の表現がどんなときに crystalline なのか（$= X$ 上の p-divisible group から生じるか）の群論的な判定法が欲しいのだが、そういう判定法は実は、 Theorem 2 自身からは出ないものの、その証明からは出るのである。

(B.) [3] の復習: L は (K を含む)p 進体（＝混標数で p 進完備な離散的付値環 $\mathcal{O}_L$ の商体）とし、その剰余体 k_L が、 K の剰余体 k 上の一次元関数体だと仮定する。そうすると、各（非退化な）射

$$\phi : Spec(L) \to X_K$$

に対して、それぞれの数論的基本群の間に誘導される連続な群準同型 $\alpha_\phi : \Gamma_L \to \Pi_X$ を対応させることができる。抽象的な連続群準同型 $\alpha : \Gamma_L \to \Pi_X$ に対して、そういう ϕ から生じた準同型 $\Gamma_L \to \Pi_X$ を、以下「幾何的」と呼ぶ。 そうすると、或る意味では、 [3] の真の主定理は次の定理である :

Theorem 3: α が幾何的なのかどうかは、完全に群論的に判定できる。

ところが、「群論的に判定できる」とあるが、具体的に、どういう群論的な条件で判定できるかに関しては、時間の関係でここでは省略するが、詳しくは [3] の Section 7 と Section 10 をご参照下さい。

いったん Theorem 3 を認めると、そこから Theorem 2 を出すのは、第一話の Faltings の理論を適用すれば容易に出来ることである。つまり、どういう α が幾何的なのかが分かれば、幾何的な $\alpha = \alpha_\phi$ をとってきて、次の構成ができる。 まず、第一話では R と呼んでいたもののかわりをつとめるのは、ここでは、 L なんだけど、 R と L の間では「環」と「体」の違いは有っても、前と全く同じように、 L の Galois cohomology を、殆んどエタール拡大を使って計算することができて、そうすると、次のような自然な同型が得られる :

$$H^1(\Delta_L, \overline{L}^\wedge(1)) \cong \Omega_L \otimes_L \overline{L}^\wedge$$

（ここで、 $\Delta_L \stackrel{\text{def}}{=} Ker(\Gamma_L \to \Gamma_K)$。） 一方、 $X_{\overline{K}}$ が「$K(\pi, 1)$」になっているという事実と、第一話の Theorem 1 を適用すると、

$$H^1(\Delta_X, \overline{K}^\wedge(1)) \cong H^1_{et}(X_{\overline{K}}, \overline{K}^\wedge(1)) \cong (H^0(X_K, \Omega_{X_K/K}) \otimes_K \overline{K}^\wedge) \oplus (H^1(X_K, \mathcal{O}_{X_K}) \otimes_K \overline{K}^\wedge(1))$$

なる自然な同型が成り立つことが分かる。ところが、「引き戻し」という操作に関しては、例え群コホモロジーであろうが、連接層の Zariski コホモロジーであろうが、何もかもが自然なため、 $\alpha = \alpha_\phi$ に引き起こされる射

$$H^1(\Delta_X, \overline{K}^\wedge(1))^{\Gamma_K} \to H^1(\Delta_L, \overline{L}^\wedge(1))$$

（肩にのっている「Γ_K」は Γ_K- 不変部分の意）をみるのと、

$$H^0(X_K, \Omega_{X_K/K}) \to \Omega_L \otimes_L \overline{L}^\wedge$$

をみるのとが、同値だということになる。ところが、後者の方は、よく考えてみると、(少なくとも、 X_K が nonhyperelliptic な場合には) $X_K \to P \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}(H^0(X_K, \Omega_{X_K/K}))$ という標準的埋め込みにおける $\phi \in X_K(L) \subseteq X_K(\overline{L}^\wedge)$ の行く先の射影座標に他ならない。しかも、ϕ が非退化な射と仮定しているため、特に dominant になるので、 X_K を、ϕ の P における像

の閉包として復元することができる。これで、Theorem 2 を（Faltings の理論を用いて）Theorem 3 から導けたことになる。実は、Theorem 3 自体もちょうどこのような議論で証明するのである。

(C.) 標準性の群論的判定法：しかし、前にも触れたように、今日の話しの主な目的は、Theorem 2 以外にも Theorem 3 から出る面白い帰結があることを指摘することにある。それには、Faltings のまた別の定理を導入する必要がある。その定理の内容とは、簡単にいうと、表現 $\lambda : \Pi_X \rightarrow PGL_2(\mathbf{Z}_p)$ に対して、λ が X 上の p-divisible group $\mathcal{G}$ から生じるためには、(B.) に出てきたような各 $\alpha_\phi : \Gamma_L \rightarrow \Pi_X$ に対して、λ の Γ_L への（α_ϕ による）制限が $Spec(\mathcal{O}_L)$ 上の p-divisible group から生じればよいことを言っている。ということは、この定理と、(B.) の Theorem 3、そして更に (I.) の (C.) を組み合わせると、次のような帰結（[3], Theorem 10.6, and [4], Chapter IV, Theorem 1.3）が出る：

Theorem 4: *In order that a curve $X \rightarrow Spec(A) = Spec(W(k))$ (where k is a perfect field) be canonical, it is necessary and sufficient that there exist a representation $\kappa_X : \Pi_X \rightarrow PGL_2(\mathbf{Z}_p)$ (whose corresponding Π_X-module we denote by V) such that: (i) the Γ_K-modules $H^i(\Delta_X, Ad(V))$ satisfy certain (not so important) properties (which we omit here for the sake of brevity); (ii) $det(V)$ is the cyclotomic character; (iii) the restriction of κ_X to Γ_L with respect to every geometric $\alpha : \Gamma_L \rightarrow \Pi_X$ arises from a p-divisible group of dimension 1 on $Spec(\mathcal{O}_L)$.*

即ち、ちょうど望み通りの、標準性の群論的判定法ができたわけである。

文献

[1] Bloch, S. and Kato, K., *L-Functions and Tamagawa Numbers* in *The Grothendieck Festschrift*, Volume I, Birkhäuser (1990), pp. 333-400.

[2] Faltings, G., *p-adic Hodge Theory*, *Journal of the Amer. Math. Soc.* **1**, No. 1, pp. 255-299 (1988).

[3] Mochizuki, S., *The Local Pro-p Grothendieck Conjecture for Hyperbolic Curves*, RIMS Preprint 1045.

[4] Mochizuki, S., *A Theory of Ordinary p-adic Curves*, RIMS Preprint 1033 (1995).

[5] Tate, J., *p-divisible Groups*, in Driebergen Conference on Local Fields, 1966 (T. A. Springer, ed.), Springer-Verlag, Berlin, pp. 158-183 (1967).

[6] Fontaine, J. M., and Laffaille, G., *Construction de représentations p-adiques*, *Ann. Sci. Ec. Norm. Super.* **15**, pp. 547-608 (1982).